

Carmen Angelescu, Nicolae Baci, Ovidiu Bădescu,  
Nicolai Buzduga, Constantin Chirilă, Daniela Chiteș,  
Marinela-Cristina Cimpoeșu, Gabriela Constantinescu,  
Dorel Cosic, Doina Cremenescu, Mihai Ionescu, Viorel Lupșor,  
Laura Marin, Ioan Marinescu, Dan Nănuți, Daniel Năstruț,  
Mihai Păuna, Ana Poștaru, Nicolae Stănică,  
Gheorghe Stoianovici, Nicolae Suci, Gheorghe Tirla,  
Dorina Trifon, George Vlad, Cătălin Zîrnă

# GHID DE PREGĂTIRE

# BACALAUREAT

# MATEMATICĂ - M2

- Filiera teoretică: profil real  
Specializarea: științe ale naturii
- Filiera tehnologică: toate profilurile  
toate specializările

SUBIECTUL I	SUBIECTUL II	SUBIECTUL III
Varianta 1 ..... 3	..... 103	..... 213
Varianta 2 ..... 4	..... 104	..... 214
Varianta 3 ..... 5	..... 105	..... 215
Varianta 4 ..... 6	..... 106	..... 216
Varianta 5 ..... 7	..... 107	..... 217
Varianta 6 ..... 8	..... 108	..... 218
Varianta 7 ..... 9	..... 109	..... 219
Varianta 8 ..... 10	..... 110	..... 220
Varianta 9 ..... 11	..... 111	..... 221
Varianta 10 ..... 12	..... 112	..... 222
Varianta 11 ..... 13	..... 113	..... 223
Varianta 12 ..... 14	..... 114	..... 224
Varianta 13 ..... 15	..... 115	..... 225
Varianta 14 ..... 16	..... 116	..... 226
Varianta 15 ..... 17	..... 117	..... 227
Varianta 16 ..... 18	..... 118	..... 228
Varianta 17 ..... 19	..... 119	..... 229
Varianta 18 ..... 20	..... 121	..... 230
Varianta 19 ..... 21	..... 123	..... 231
Varianta 20 ..... 22	..... 124	..... 232
Varianta 21 ..... 23	..... 125	..... 233
Varianta 22 ..... 24	..... 126	..... 234
Varianta 23 ..... 25	..... 128	..... 235
Varianta 24 ..... 26	..... 129	..... 236
Varianta 25 ..... 27	..... 130	..... 237
Varianta 26 ..... 28	..... 132	..... 238
Varianta 27 ..... 29	..... 133	..... 239
Varianta 28 ..... 30	..... 134	..... 240
Varianta 29 ..... 31	..... 135	..... 241
Varianta 30 ..... 32	..... 136	..... 242
Varianta 31 ..... 33	..... 137	..... 243

Varianta 32 .....	34	138	244
Varianta 33 .....	35	139	245
Varianta 34 .....	36	140	247
Varianta 35 .....	37	141	248
Varianta 36 .....	38	142	249
Varianta 37 .....	39	143	250
Varianta 38 .....	40	144	252
Varianta 39 .....	41	145	254
Varianta 40 .....	42	146	255
Varianta 41 .....	43	147	256
Varianta 42 .....	44	148	257
Varianta 43 .....	45	149	258
Varianta 44 .....	46	150	259
Varianta 45 .....	47	151	260
Varianta 46 .....	48	152	261
Varianta 47 .....	49	153	262
Varianta 48 .....	50	155	263
Varianta 49 .....	51	156	265
Varianta 50 .....	52	157	266
Varianta 51 .....	53	158	267
Varianta 52 .....	54	160	268
Varianta 53 .....	55	161	269
Varianta 54 .....	56	162	270
Varianta 55 .....	57	163	271
Varianta 56 .....	58	164	272
Varianta 57 .....	59	165	273
Varianta 58 .....	60	166	274
Varianta 59 .....	61	167	275
Varianta 60 .....	62	168	276
Varianta 61 .....	63	169	277
Varianta 62 .....	64	170	278
Varianta 63 .....	65	171	279
Varianta 64 .....	66	172	280
Varianta 65 .....	67	173	281
Varianta 66 .....	68	174	282
Varianta 67 .....	69	175	283
Varianta 68 .....	70	176	284
Varianta 69 .....	71	177	285

Varianta 70 .....	72	178	286
Varianta 71 .....	73	179	287
Varianta 72 .....	74	180	288
Varianta 73 .....	75	181	289
Varianta 74 .....	76	182	290
Varianta 75 .....	77	183	291
Varianta 76 .....	78	184	292
Varianta 77 .....	79	186	293
Varianta 78 .....	80	188	294
Varianta 79 .....	81	189	295
Varianta 80 .....	82	190	296
Varianta 81 .....	83	191	297
Varianta 82 .....	84	192	298
Varianta 83 .....	85	193	299
Varianta 84 .....	86	195	300
Varianta 85 .....	87	196	301
Varianta 86 .....	88	197	302
Varianta 87 .....	89	198	303
Varianta 88 .....	90	199	304
Varianta 89 .....	91	200	305
Varianta 90 .....	92	201	306
Varianta 91 .....	93	202	307
Varianta 92 .....	94	203	308
Varianta 93 .....	95	204	309
Varianta 94 .....	96	205	310
Varianta 95 .....	97	206	311
Varianta 96 .....	98	207	312
Varianta 97 .....	99	208	313
Varianta 98 .....	100	209	314
Varianta 99 .....	101	210	315
Varianta 100 .....	102	211	316

## VARIANTA 1

- 5p** 1. Să se calculeze  $C_3^2 + 3!$ .
- 5p** 2. Să se determine soluțiile reale ale ecuației  $\log_5(3x + 4) = 2$ .
- 5p** 3. Să se calculeze  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ , știind că  $x_1$  și  $x_2$  sunt soluțiile ecuației  $x^2 - x - 2 = 0$ .
- 5p** 4. Se consideră funcția  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -x^2$ . Să se determine mulțimea valorilor funcției  $f$ .
- 5p** 5. Fie punctele  $A(2, -1)$  și  $B(-1, 3)$ . Să se determine numerele reale  $a$  și  $b$  astfel încât  $\overrightarrow{AB} = a\vec{i} + b\vec{j}$ .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul  $ABC$  cu  $AB = 4$ ,  $AC = \sqrt{7}$  și  $BC = \sqrt{3}$ . Să se calculeze măsura unghiului  $B$ .

### Soluții

1.  $C_3^2 + 3! = \frac{3!}{2! \cdot 1!} + 3! = 3 + 6 = 9$ .
2. Punem condiția:  $3x + 4 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{4}{3}$ ,  $D = \left(-\frac{4}{3}, +\infty\right)$ . Din  $\log_5(3x + 4) = 2$  rezultă  $3x + 4 = 25$ , adică  $3x = 21$ , deci  $x = 7 \in D$ .
3. Din relațiile lui Viéte:  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 x_2 = -2 \end{cases}$ . Dar  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -\frac{1}{2}$ .
4.  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -x^2$  este continuă și strict descrescătoare pe  $[0, 1]$ . Atunci mulțimea valorilor funcției  $f$  este:  $f([0, 1]) = [f(1); f(0)] = [-1, 0]$ .
5. Cum  $\overrightarrow{AB} = (-1 - 2)\vec{i} + (3 + 1)\vec{j} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$ , atunci  $a = -3$  și  $b = 4$ .
6. Din teorema cosinusului avem  $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B$ , adică  $(\sqrt{7})^2 = 4^2 + \sqrt{3}^2 - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos B$ . Rezultă că  $8\sqrt{3} \cos B = 12$ , de unde  $\cos B = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , deci  $m(\sphericalangle B) = 30^\circ$ .

- 5p** 1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - 3$ . Să se determine  $f(-4) \cdot f(-3) \cdot \dots \cdot f(3) \cdot f(4)$ .
- 5p** 2. Să se determine soluțiile reale ale ecuației  $\log_2(x+2) + \log_2 x = 3$ .
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi inecuația  $x^2 - 5x + 5 \leq 1$ .
- 5p** 4. Să se demonstreze că pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  numerele  $3^x - 1$ ,  $3^{x+1}$  și  $5 \cdot 3^x + 1$  sunt termeni consecutivi într-o progresie aritmetică.
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(4, -8)$  și  $B(6, 3)$ . Să se determine coordonatele vectorului  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ .
- 5p** 6. Să se calculeze aria triunghiului  $ABC$  știind că  $AC = 2$ ,  $m(\sphericalangle BAC) = 30^\circ$  și  $AB = 4$ .

**Soluții**

1.  $f(x) = 0$  dacă  $x = 3$ ; deci  $f(3) = 0$ . Atunci  $f(-4) \cdot f(-3) \cdot \dots \cdot f(4) = 0$ .

2. Condiții:  $\begin{cases} x+2 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x > 0 \end{cases}$ , deci  $D = (0, +\infty)$ .

$\log_2(x+2) + \log_2 x = 3$ ,  $\log_2 x(x+2) = 3$ , de unde  $x^2 + 2x = 2^3$ , adică  $x^2 + 2x - 8 = 0$ ;  $\Delta = 36$ , de unde  $x_1 = 2 \in D$  și  $x_2 = -4 \notin D$ .  $S = \{2\}$ .

3.  $x^2 - 5x + 5 \leq 1$ ;  $x^2 - 5x + 4 \leq 0$  rezultă  $x \in [1, 4]$ . Dar  $x \in \mathbb{Z}$ , deci  $x \in \{1, 2, 3, 4\}$ .

4. Cele trei numere sunt în progresie aritmetică dacă  $3^{x+1} = \frac{3^x - 1 + 5 \cdot 3^x + 1}{2}$ , adică

$$2 \cdot 3^{x+1} = 6 \cdot 3^x; 3^x \cdot 3 = 3 \cdot 3^x \quad (\text{A}), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

5. Avem  $\overrightarrow{OA} = 4\vec{i} - 8\vec{j}$  și  $\overrightarrow{OB} = 6\vec{i} + 3\vec{j}$ . Atunci  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 10\vec{i} - 5\vec{j}$ , deci coordonatele sunt  $(10, -5)$ .

$$6. A_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2} = \frac{8 \cdot \frac{1}{2}}{2} = 2.$$

## VARIANTA 3

- 5p 1. Să se determine al zecelea termen al șirului 1, 7, 13, 19, ... .
- 5p 2. Se consideră toate numerele naturale de trei cifre scrise cu elemente din mulțimea  $\{1, 2\}$ . Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un astfel de număr, acesta să fie divizibil cu 3.
- 5p 3. Să se determine soluțiile reale ale ecuației  $\sqrt{2+x} = x$ .
- 5p 4. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x + 1$ . Să se calculeze  $f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1)$ .
- 5p 5. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctele  $A(2, -1)$  și  $B(1, -2)$ .
- 5p 6. Să se calculeze aria triunghiului  $ABC$ , știind că  $AB = AC = \sqrt{2}$ ,  $m(\sphericalangle A) = 30^\circ$

## Soluții

1. Observăm că termenii șirului sunt în progresie aritmetică. Avem  $a_1 = 1$  și  $r = 6$ .

Deci  $a_{10} = a_1 + 9r = 1 + 9 \cdot 6 = 55$ .

2. Fie numerele de acest fel notate  $\overline{abc}$ .

Fie funcțiile  $f: \{a, b, c\} \rightarrow \{1, 2\}$ . Sunt  $2^3 = 8$  astfel de funcții, adică 8 astfel de numere  $\overline{abc}$ , cu  $a, b, c \in \{1, 2\}$ . Deci sunt 8 numere de 3 cifre scrise cu elemente din mulțimea  $\{1, 2\}$ . Dintre ele, sunt divizibile cu 3 doar cele cu  $a = b = c$ , adică 111 și 222.

Atunci  $P = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0,25$ .

3. Din condițiile de existență  $2 + x \geq 0$  și  $x \geq 0$ , rezultă  $x = [0, +\infty) = D$ . Ridicând la pătrat, ecuația devine  $x^2 - x - 2 = 0$  având soluțiile  $x_1 = -1 \notin D$  și  $x_2 = 2 \in D$ .

4.  $f(-2) = 2 \cdot (-2) + 1 = -3$ ,  $f(-1) = 2 \cdot (-1) + 1 = -1$ ,  $f(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$ ,  
 $f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ , deci  $f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1) = 0$ .

5.  $(AB): y - y_A = m(x - x_A)$ ;  $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2 + 1}{1 - 2} = 1$ .

Rezultă  $(AB): y + 1 = x - 2 \Leftrightarrow x - y - 3 = 0$ .

6.  $A_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2} = \frac{(\sqrt{2})^2 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2}$ .

- 5p** 1. Să se determine soluțiile întregi ale inecuației  $(x-1)^2 + x - 7 < 0$ .
- 5p** 2. Să se calculeze suma primilor 5 termeni ai unei progresii aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $a_1 = 1$  și  $a_2 = 3$ .
- 5p** 3. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = mx^2 - 8x - 3$ , unde  $m$  este un număr real nenul. Să se determine  $m$  știind că valoarea maximă a funcției  $f$  este egală cu 5.
- 5p** 4. Să se determine soluțiile reale ale ecuației  $\log_2(x+2) - \log_2(x-5) = 3$ .
- 5p** 5. Să se determine numărul real  $a$  știind că vectorii  $\vec{u} = 2\vec{i} + a\vec{j}$  și  $\vec{v} = 3\vec{i} + (a-2)\vec{j}$  sunt coliniari.
- 5p** 6. Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului  $ABC$ , știind că  $AB = 3$  și  $m(\sphericalangle C) = 30^\circ$ .

**Soluții**

1.  $x^2 - 2x + 1 + x - 7 < 0 \Rightarrow x^2 - x - 6 < 0$ ,  $(x-3)(x+2) < 0$ .

Avem  $x \in (-2, 3) \cap \mathbb{Z} = \{-1, 0, 1, 2\}$ .

2.  $r = a_2 - a_1 = 2$ .  $S_5 = \frac{[2a_1 + (5-1)r] \cdot 5}{2} = \frac{10 \cdot 5}{2} = 25$ .

3. Dacă  $f$  are maxim, atunci  $m < 0$ .

$$\max(f) = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(12m+64)}{4m} = \frac{-3m-16}{m}$$

Deci  $\frac{-3m-16}{m} = 5$ , adică  $-8m = 16$ , de unde  $m = -2$ .

4. Condiții:  $\begin{cases} x+2 > 0 \\ x-5 > 0 \end{cases} \Rightarrow D = (5, +\infty)$ .

$\log_2(x+2) - \log_2(x-5) = 3$ ,  $\log_2 \frac{x+2}{x-5} = 3$ , deci  $\frac{x+2}{x-5} = 8 \Rightarrow 8x - 40 - x - 2 = 0$ , adică  $7x = 42$ , de unde  $x = 6 \in D$ .

5. Dacă  $\vec{u}$  și  $\vec{v}$  sunt coliniari, atunci  $\frac{2}{3} = \frac{a}{a-2}$ , adică  $2a - 4 = 3a$ , de unde  $a = -4$ .

6. Din teorema sinusurilor avem  $\frac{AB}{\sin C} = 2R$ . Atunci  $R = \frac{AB}{2 \sin C} = \frac{3}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 3$ .

## VARIANTA 5

- 5p 1. Să se determine numărul elementelor mulțimii  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x+1| \leq 2\}$ .
- 5p 2. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea  $\{\sqrt[3]{1}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, \dots, \sqrt[3]{30}\}$ , acesta să fie număr rațional.
- 5p 3. Fie funcțiile  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x + 3$  și  $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = 2x - 1$ . Să se determine soluția reală a ecuației  $2f(x) + 3g(x) = -5$ .
- 5p 4. După o reducere cu 20 %, prețul unui produs este 320 de lei. Să se determine prețul produsului înainte de reducere.
- 5p 5. În reperul cartezian  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  se consideră vectorii  $\vec{u} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$  și  $\vec{v} = 5\vec{i} - \vec{j}$ . Să se determine coordonatele vectorului  $5\vec{u} + 3\vec{v}$ .
- 5p 6. Fie triunghiul dreptunghic  $ABC$  și  $D$ , mijlocul ipotenuzei  $BC$ . Să se calculeze lungimea laturii  $AB$  știind că  $AC = 6$  și  $AD = 5$ .

**Soluții**

1.  $A = [-3; 1] \cap \mathbb{Z}$  adică numărul elementelor mulțimii este 5.
2. Numerele raționale sunt  $\{\sqrt[3]{1}, \sqrt[3]{8}, \sqrt[3]{27}\} = \{1, 2, 3\}$ , adică 3 cazuri favorabile din cele 30 posibile. Atunci  $P = \frac{3}{30} = \frac{1}{10} = 0,1$ .
3. Avem  $2f(x) + 3g(x) = -5$ ;  $2(x+3) + 3(2x-1) = -5$ ;  $8x+3 = -5$ . Rezultă  $x = -1$ .
4. 80% din  $x$  este 320; atunci  $x = 400$ .
5.  $5 \cdot \vec{u} + 3 \cdot \vec{v} = -15 \cdot \vec{i} + 10 \cdot \vec{j} + 15 \cdot \vec{i} - 3 \cdot \vec{j} = 7 \cdot \vec{j}$ , de unde coordonatele  $(0, 7)$ .
6. Cum  $BC = 2AD$ , atunci  $BC = 10$  și conform teoremei lui Pitagora,  $AB^2 = BC^2 - AC^2 = 100 - 36 = 64$ , de unde  $AB = 8$ .

### VARIANTA 1

1. Se consideră determinantul  $d = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$ , unde  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$  sunt

soluțiile ecuației  $x^3 - 3x + 2 = 0$ .

- 5p** a) Să se calculeze  $x_1 + x_2 + x_3$ .
- 5p** b) Să se arate că  $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -6$ .
- 5p** c) Să se calculeze valoarea determinantului  $d$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale definim operația  $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$ .
- 5p** a) Să se verifice că  $x \circ y = (x + 4)(y + 4) - 4$  pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Să se calculeze  $x \circ (-4)$ , unde  $x$  este număr real.
- 5p** c) Știind că operația „ $\circ$ ” este asociativă, să se calculeze  $(-2009) \circ (-2008) \circ \dots \circ 2008 \circ 2009$ .

### Soluții

1. a) Din relațiile lui Viéte avem:  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ .

b) Din:  $x_1$  soluție a ecuației, avem  $x_1^3 - 3x_1 + 2 = 0$ ,

$x_2$  soluție a ecuației, avem  $x_2^3 - 3x_2 + 2 = 0$ ,

$x_3$  soluție a ecuației, avem  $x_3^3 - 3x_3 + 2 = 0$ .

Adunăm relațiile și obținem  $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3 \underbrace{(x_1 + x_2 + x_3)}_0 + 6 = 0$ , deci  $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -6$ .

c) Adunăm liniile 2 și 3 la linia 1.

$$d = \begin{vmatrix} \overbrace{x_1 + x_2 + x_3}^0 & \overbrace{x_1 + x_2 + x_3}^0 & \overbrace{x_1 + x_2 + x_3}^0 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 0$$

2. a)  $(x + 4)(y + 4) - 4 = xy + 4x + 4y + 12 = x \circ y, \forall x, y \in \mathbb{R}$ .

b)  $x \circ (-4) = (x + 4)(-4 + 4) - 4 = -4, \forall x \in \mathbb{R}$ .

c)  $(-2009) \circ (-2008) \circ (-2007) \circ \dots \circ (-5) \circ (-4) \circ (-3) \dots \circ 2009 = -4$  deoarece

$x \circ (-4) = (-4) \circ x = -4, \forall x \in \mathbb{R}$ .

1. Se consideră determinantul  $d = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$ , unde  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

5p a) Pentru  $a = 2$ ,  $b = 1$  și  $c = -1$ , să se calculeze determinantul  $d$ .

5p b) Să se verifice că  $d = \frac{1}{2}(a+b+c)((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2)$ , oricare ar fi  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

5p c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\begin{vmatrix} 2^x & 3^x & 5^x \\ 5^x & 2^x & 3^x \\ 3^x & 5^x & 2^x \end{vmatrix} = 0$ .

2. Pe mulțimea numerelor reale definim operația  $x \circ y = 2xy - 6x - 6y + 21$ .

5p a) Să se arate că  $x \circ y = 2(x-3)(y-3) + 3$ , pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ .

5p b) Să se arate că  $x \circ 3 = 3 \circ x = 3$ , pentru oricare  $x \in \mathbb{R}$ .

5p c) Știind că operația „ $\circ$ ” este asociativă, să se calculeze  $1 \circ \sqrt{2} \circ \sqrt{3} \circ \dots \circ \sqrt{2009}$ .

**Soluții**

1. a) Calculăm direct prin regula triunghiului:  $d = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 14$ .

$$b) d = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) = (a+b+c) \cdot \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - 2ab + a^2 + c^2 - 2ac + b^2 + c^2 - 2bc) = \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (c-a)^2 + (b-c)^2].$$

c) La punctul b) am obținut  $d = \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (c-a)^2 + (b-c)^2]$  și

$$d = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc, \text{ deci } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (c-a)^2 + (b-c)^2].$$

Fie  $2^x = a$ ;  $3^x = b$ ;  $5^x = c$ . Avem:  $\frac{8^x + 27^x + 125^x - 3(2 \cdot 3 \cdot 5)^x}{0} =$

$$= \frac{1}{2}(2^x + 3^x + 5^x)[(2^x - 3^x)^2 + (5^x - 2^x)^2 + (3^x - 5^x)^2]. \text{ Ecuația devine}$$

$$(2^x + 3^x + 5^x)[(2^x - 3^x)^2 + (3^x - 5^x)^2 + (5^x - 2^x)^2] = 0, \text{ deci } 2^x = 3^x = 5^x, \text{ de unde } x = 0 \text{ soluție unică.}$$

2. a)  $2(x-3)(y-3) + 3 = 2xy - 6x - 6y + 18 + 3 = 2xy - 6x - 6y + 21 = x \circ y, \forall x, y \in \mathbb{R}$ .

b)  $x \circ 3 = 6x - 6x - 18 + 21 = 3$ ;  $3 \circ x = 6x - 18 - 6x + 21 = 3$ , deci  $x \circ 3 = 3 \circ x = 3$ .

c) Se observă că  $x \circ 3 = 2 \cdot 0 + 3 = 3$  și  $3 \circ x = 2 \cdot 0 + 3 = 3$ . Atunci avem:

$$1 \circ \sqrt{2} \circ \sqrt{3} \circ \dots \circ \sqrt{9} \circ \dots \circ \sqrt{2009} = (1 \circ \sqrt{2} \circ \dots \circ \sqrt{8}) \circ \sqrt{9} \circ (\sqrt{10} \circ \dots \circ \sqrt{2009}) = \sqrt{9} = 3.$$

## VARIANTA 3

1. Se consideră determinantul  $d = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$ , unde  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$  sunt soluțiile

ecuației  $x^3 - 2x = 0$ .

5p a) Să se calculeze  $x_1 + x_2 + x_3$ .

5p b) Să se calculeze  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ .

5p c) Să se calculeze determinantul  $d$ .

2. Se consideră polinoamele cu coeficienți reali

$$f = X^4 + aX^3 - 28X^2 + bX + 96, \quad g = X^2 + 2X - 24 \quad \text{și}$$

$$h = (X^2 + 2X - 24)(X^2 - 4).$$

5p a) Să se scrie forma algebrică a polinomului  $h$ .

5p b) Să se determine  $a, b \in \mathbb{R}$  astfel încât polinoamele  $f$  și  $h$  să fie egale.

5p c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația

$$16^x + 2 \cdot 8^x - 28 \cdot 4^x - 8 \cdot 2^x + 96 = 0.$$

**Soluții**

1. a) Din relațiile lui Viéte avem  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ .

b) Din relațiile lui Viéte avem:  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ ,  $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -2$ . Avem

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 4.$$

c)  $d = 3x_1x_2x_3 - (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)$ . Din relațiile lui Viéte avem  $x_1x_2x_3 = 0$  și

$x_1 + x_2 + x_3 = 0$ . Cum  $x_1, x_2$  și  $x_3$  sunt rădăcinile ecuației  $x^3 - 2x = 0$  avem:

$$x_1^3 - 2x_1 = 0, \quad x_2^3 - 2x_2 = 0, \quad x_3^3 - 2x_3 = 0. \quad \text{Adunând obținem:}$$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 2(x_1 + x_2 + x_3) = 0. \quad \text{Rezultă că } d = 0.$$

2. a)  $h = X^4 - 4X^2 + 2X^3 - 8X - 24X^2 + 96 = X^4 + 2X^3 - 28X^2 - 8X + 96$ .

b)  $f = h$  dacă  $a = 2$  și  $b = -8$ .

c) Notăm  $2^x = t$ ,  $t > 0$ ;  $t^4 + 2t^3 - 28t^2 - 8t + 96 = 0$ . Conform punctului b) rezultă că

$$t^4 + 2t^3 - 28t^2 - 8t + 96 = (t^2 + 2t - 24)(t^2 - 4) = (t + 6)(t - 4)(t - 2)(t + 2). \quad \text{Rezultă că}$$

ecuația în  $t$  are soluțiile:  $t_1 = -6 < 0$ ;  $t_2 = 4$ ;  $t_3 = 2$ ;  $t_4 = -2 < 0$ .

Din  $2^x = 4 \Rightarrow x = 2$ ; din  $2^x = 2 \Rightarrow x = 1$ . Soluțiile ecuației date sunt 1 și 2.

1. În mulțimea  $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$  se consideră matricele  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$  și

$X(a) = I_2 + aA$ , unde  $a \in \mathbf{R}$ .

5p a) Să se calculeze  $A^3$ , unde  $A^3 = A \cdot A \cdot A$ .

5p b) Să se verifice dacă  $X(a) \cdot X(b) = X(a + b + ab)$ , oricare ar fi numerele  $a, b \in \mathbf{R}$ .

5p c) Să se calculeze suma  $X(1) + X(2) + X(3) + \dots + X(2009)$ .

2. Se consideră inelul  $(\mathbf{Z}_6, +, \cdot)$ , unde  $\mathbf{Z}_6 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}\}$ .

5p a) Să se rezolve în  $\mathbf{Z}_6$  ecuația  $\hat{2}x + \hat{5} = \hat{1}$ .

5p b) Să se calculeze determinantul  $\begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} \\ \hat{2} & \hat{3} & \hat{1} \\ \hat{3} & \hat{1} & \hat{2} \end{vmatrix}$  în  $\mathbf{Z}_6$ .

5p c) Să se rezolve în  $\mathbf{Z}_6$  sistemul de ecuații  $\begin{cases} \hat{2}x + y = \hat{4} \\ x + \hat{2}y = \hat{5} \end{cases}$ .

### Soluții

1. a)  $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = A$ ;  $A^3 = A^2 \cdot A = A \cdot A = A^2 = A$ .

b)  $X(a) \cdot X(b) = (I_2 + aA)(I_2 + bA) = I_2 + (a + b)A + ab \underbrace{A^2}_A = I_2 + (a + b + ab)A = X(a + b + ab)$ ,  $\forall a, b \in \mathbf{R}$ .

c) Avem  $X(1) + X(2) + X(3) + \dots + X(2009) = I_2 + A + I_2 + 2A + \dots + I_2 + 2009A$ , de unde se obține  $X(1) + X(2) + \dots + X(2009) = 2009I_2 + 1005 \cdot 2009A$ .

2. a)  $-\hat{5} = \hat{1}$ ;  $\hat{2}x + \hat{5} = \hat{1}$ , adică  $\hat{2}x = \hat{2}$ , de unde se obțin soluțiile  $x_1 = \hat{1}$  și  $x_2 = \hat{4}$ .

b)  $d = \begin{vmatrix} \hat{0} & \hat{2} & \hat{3} \\ \hat{0} & \hat{3} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{2} \end{vmatrix} = \hat{0}$ .

c) Prin substituție,  $y = \hat{4} - \hat{2}x = \hat{4} + \hat{4}x$ ; obținem  $x + \hat{2} + \hat{2}x = \hat{5}$ , adică  $\hat{3}x = \hat{3}$ ; sistemul are soluțiile  $(\hat{1}; \hat{2})$ ;  $(\hat{3}; \hat{4})$  și  $(\hat{5}; \hat{0})$ .

### VARIANTA 5

1. Se consideră matricea  $A = \begin{pmatrix} x-3 & 1 \\ 1 & x-3 \end{pmatrix}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Se notează  $A^2 = A \cdot A$ ,

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**5p** a) Să se determine  $x$  real, știind că  $\det(A) = 0$ .

**5p** b) Să se verifice egalitatea  $A^2 = (2x-6)A - (x^2 - 6x + 8) \cdot I_2$ .

**5p** c) Să se determine  $x \in \mathbb{R}$  pentru care  $A^2 = 2A$ .

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție  $x \circ y = xy - 2(x+y) + 6$ .

**5p** a) Să se arate că  $x \circ y = (x-2)(y-2) + 2$ , oricare ar fi  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**5p** b) Să se demonstreze că  $x \circ 2 = 2$ , oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}$ .

**5p** c) Știind că legea de compoziție „ $\circ$ ” este asociativă, să se calculeze valoarea expresiei  $E = (-2009) \circ (-2008) \circ \dots \circ (-1) \circ 0 \circ 1 \circ 2 \circ \dots \circ 2009$ .

### Soluții

1. a)  $\det(A) = \begin{vmatrix} x-3 & 1 \\ 1 & x-3 \end{vmatrix} = (x-3)^2 - 1 = x^2 - 6x + 8$ .

$$\det(A) = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0, \quad x^2 - 4x - 2x + 8 = 0, \quad x(x-4) - 2(x-4) = 0, \\ (x-4)(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 4, x_2 = 2.$$

b) Din Cayley-Hamilton avem  $A^2 - \text{Tr}(A) \cdot A + \det A \cdot I_2 = 0$ .

Avem  $\text{Tr}(A) = x-3 + x-3 = 2x-6$  și  $\det A = x^2 - 6x + 8$ .

Rezultă că  $A^2 = \text{Tr}(A) \cdot A - \det A \cdot I_2 = (2x-6)A - (x^2 - 6x + 8)I_2$ .

c)  $A^2 - 2A = \begin{pmatrix} x^2 - 8x + 16 & 2x - 8 \\ 2x - 8 & x^2 - 8x + 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , deci  $x = 4$ .

2. a)  $(x-2)(y-2) + 2 = xy - 2x - 2y + 4 + 2 = xy - 2(x+y) + 6 = x \circ y$ .

b)  $x \circ 2 = (x-2)(2-2) + 2 = 0 + 2 = 2, \forall x \in \mathbb{R}$ .

c) Folosind asociativitatea și relația de la punctul b) obținem:

$$E = [(-2009) \circ (-2008) \circ (-2007) \circ \dots \circ (-1)] \circ 2 \circ [3 \circ \dots \circ 2008 \circ 2009] = 2.$$

## VARIANTA 1

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ .

- 5p a) Să se calculeze derivata funcției  $f$ .  
 5p b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției  $f$ .  
 5p c) Să se demonstreze că  $f(x) \leq -4$  pentru orice  $x < -1$ .

2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x^2 + e^x, & x \leq 0 \\ \sqrt{x} + 1, & x > 0 \end{cases}$

- 5p a) Să se arate că funcția  $f$  admite primitive pe  $\mathbb{R}$ .  
 5p b) Să se calculeze  $\int_{-1}^0 x f(x) dx$ .  
 5p c) Să se determine volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei  $Ox$  a graficului funcției  $g: [0;1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = f(x)$ .

### Soluții

1. a)  $f'(x) = \left(\frac{x^2}{x+1}\right)' = \left(\frac{x^2-1}{x+1}\right)' + \left(\frac{1}{x+1}\right)' = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

b)  $f'(x) = 0$ , dacă  $x \in \{0, -2\}$ .

$x$	$-\infty$	$-2$	$-1$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	+++	0--		-0+++	
$f(x)$		$\nearrow$	$-4$	$\searrow$	$0$
				$\searrow$	$0$
					$\nearrow$

$f$  este strict crescătoare pe  $(-\infty, -2] \cup [0; +\infty)$ ;

$f$  este strict descrescătoare pe  $[-2, -1) \cup (-1; 0]$ .

c) Din tabloul de variație alcătuit pentru punctul b) avem că

$f$  strict crescătoare pe  $(-\infty, -2]$ , de unde  $f(x) \leq f(-2) = -4, \forall x \in (-\infty, -2]$

$f$  strict descrescătoare pe  $[-2, -1)$ , de unde  $f(x) \leq f(-2) = -4, \forall x \in [-2, -1)$ .

Deci  $f(x) \leq -4, \forall x \in (-\infty, -1)$ .

2. a) Limita la stânga, respectiv la dreapta a funcției  $f$  în  $x_0 = 0$  este egală cu 1;

$f(0) = 1$ , deci  $f$  este continuă pe  $\mathbb{R} \Rightarrow f$  admite primitive pe  $\mathbb{R}$ .

b)  $\int_{-1}^0 (x^3 + xe^x) dx = \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^0 + \int_{-1}^0 x(e^x)' dx = -\frac{1}{4} + xe^x \Big|_{-1}^0 - \int_{-1}^0 e^x dx = \frac{2}{e} - \frac{5}{4}$ .

c)  $V = \pi \int_0^1 g^2(x) dx = \pi \int_0^1 (\sqrt{x} + 1)^2 dx = \pi \int_0^1 (x + 2\sqrt{x} + 1) dx = \pi \left( \frac{x^2}{2} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + x \right) \Big|_0^1 = \frac{17\pi}{6}$ .

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x - e^{-x}$ .

5p

a) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ .

5p

b) Să se arate că funcția  $f$  este crescătoare pe  $\mathbb{R}$ .

5p

c) Să se calculeze  $S = g(0) + g(1) + \dots + g(2009)$ , unde  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = f'(x) - f''(x)$ .

2. Se consideră funcțiile  $f, F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  date prin  $f(x) = xe^x$  și  $F(x) = (x-1)e^x$ .

5p

a) Să se verifice că funcția  $F$  este o primitivă a funcției  $f$ .

5p

b) Să se calculeze aria suprafeței plane determinate de graficul funcției  $f$ , axa  $Ox$  și dreptele  $x = 0$  și  $x = 1$ .

5p

c) Să se demonstreze că  $\int_1^x \frac{f(t)f''(t) - (f'(t))^2}{f^2(t)} dt = \frac{x+1}{x} - 2$  pentru orice  $x > 1$ .

**Soluții**

1. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = e^0 + e^0 = 2$ .

b)  $f'(x) = e^x + e^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , deci  $f$  este strict crescătoare pe  $\mathbb{R}$ .

c)  $f''(x) = e^x - e^{-x} = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ ;

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = e^x + e^{-x} - (e^x - e^{-x}) = 2e^{-x}$ .

$g(0) + g(1) + \dots + g(2009) = 2(e^0 + e^{-1} + \dots + e^{-2009}) = 2 \cdot \frac{e^{-2010} - 1}{e^{-1} - 1} = 2 \cdot \frac{e^{2010} - 1}{e^{2010}} \cdot \frac{e}{e-1} =$

Suma primilor 2010 termeni  
în progresie geometrică cu  
 $b_1=1; q=e^{-1}; n=2010$

$= 2 \cdot \frac{e^{2010} - 1}{e^{2009}(e-1)}$ .

2. a)  $F$  derivabilă pe  $\mathbb{R}$  și  $F'(x) = [(x-1)e^x]' = e^x + (x-1) \cdot e^x = x \cdot e^x = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ .

b)  $f$  continuă și pozitivă, deci  $A = \int_0^1 f(x) dx = F(x)|_0^1 = (x-1)e^x|_0^1 = 1$ .

c)  $\int_1^x \frac{f(t)f''(t) - (f'(t))^2}{f^2(t)} dt = \int_1^x \left( \frac{f'(t)}{f(t)} \right)' dt = \frac{f'(t)}{f(t)} \Big|_1^x = \frac{(t+1)e^t}{te^t} \Big|_1^x = \frac{t+1}{t} \Big|_1^x = \frac{x+1}{x} - 2, \forall x > 1$ .

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ .

5p a) Să se verifice că  $f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$ , pentru orice  $x \in (0; +\infty)$ .

5p b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției  $f$ .

5p c) Să se demonstreze că  $3\sqrt[5]{3} < 5\sqrt[3]{3}$ .

2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} e \cdot e^x, & x \leq -1 \\ 2 + x, & x > -1 \end{cases}$ .

5p a) Să se arate că funcția  $f$  admite primitive pe  $\mathbb{R}$ .

5p b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei  $Ox$ , a graficului funcției  $g: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = f(x)$ ,  $x \in [0, 2]$ .

5p c) Să se calculeze  $\int_{-2}^0 \frac{x f(x)}{e} dx$ .

### Soluții

1. a)  $f'(x) = \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{\frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2\sqrt{x} - \sqrt{x} \ln x}{2x^2} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}, \forall x > 0.$

b)  $f'(x) = 0$  dacă  $x = e^2$ .

$f$  este strict crescătoare pe  $(0; e^2]$  și  $f$  este strict descrescătoare pe  $[e^2, +\infty)$ .

c)  $0 < 3 < 5 < e^2$ ,  $f$  strict crescătoare pe  $(0, e^2]$ , deci

$f(3) < f(5)$ ,  $\frac{\ln 3}{\sqrt{3}} < \frac{\ln 5}{\sqrt{5}}$ , de unde  $\ln 3\sqrt[5]{3} < \ln 5\sqrt[3]{3}$ . Fie  $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \ln x$ ;

este strict crescătoare pe  $(0, +\infty)$ , deci  $3\sqrt[5]{3} < 5\sqrt[3]{3}$ .

2. a)  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} e^{x+1} = 1 = f(-1)$ ,  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (2 + x) = 1$ . Deci  $f$  este

continuă în 1, dar  $f$  continuă pe  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ , deci  $f$  continuă pe  $\mathbb{R}$ . Rezultă că  $f$  admite primitive pe  $\mathbb{R}$ .

b)  $V = \pi \int_0^2 g^2(x) dx = \pi \int_0^2 (2+x)^2 dx = \pi \left. \frac{(2+x)^3}{3} \right|_0^2 = \pi \left( \frac{64}{3} - \frac{8}{3} \right) = \frac{56}{3} \pi.$

c)  $\int_{-2}^0 \frac{x \cdot f(x)}{e} dx = \int_{-2}^{-1} \frac{x e^x \cdot e}{e} dx + \int_{-1}^0 \frac{(2x+x^2)}{e} dx = (x-1)e^x \Big|_{-2}^{-1} + \frac{1}{e} \left( x^2 + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^0 = \frac{9-8e}{3e^2}$

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + e^{-x}$ .

5p a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

5p b) Să se arate că  $f$  este descrescătoare pe  $(-\infty, 0]$  și crescătoare pe  $[0, +\infty)$ .

5p c) Să se determine ecuația asimptotei oblice către  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .

2. Se consideră funcția  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = (x+1)^3 - 3x^2 - 1$ .

5p a) Să se calculeze  $\int_0^1 g(x) dx$ .

5p b) Să se determine numărul real  $a > 1$  astfel încât  $\int_1^a (g(x) - x^3) \cdot e^x dx = 6e^a$ .

5p c) Să se calculeze  $\int_0^1 (3x^2 + 3) \cdot g^{2009}(x) dx$ .

### Soluții

1. a)  $f'(x) = 1 - e^{-x}$ .

b)  $f'(x) = 1 - e^{-x}$ ;  $f'(x) = 0$  dacă  $x = 0$  soluție unică.

Dacă  $x \leq 0$ , avem  $-e^{-x} \leq -1$ , deci  $f'(x) \leq 0$ ; rezultă  $f$  este strict descrescătoare pe  $(-\infty, 0]$ .

Dacă  $x \geq 0$ , avem  $-e^{-x} \geq -1$ , deci  $f'(x) \geq 0$ ; rezultă  $f$  este strict crescătoare pe  $[0, +\infty)$ .

c)  $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + e^{-x}}{x} = 1$ ,  $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$ . Deci  $y = x$  este asimptotă oblică la  $+\infty$ .

2. a)  $\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 (x^3 + 3x) dx = \int_0^1 x^3 dx + 3 \int_0^1 x dx = \left( \frac{x^4}{4} + 3 \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{7}{4}$ .

b)  $\int_1^a (g(x) - x^3) \cdot e^x dx = 3 \int_1^a x e^x dx = 3 \int_1^a x (e^x)' dx = 3(xe^x \Big|_1^a - e^x \Big|_1^a) = 3e^a(a-1) = 6e^a \Rightarrow a = 3$ .

c)  $\int_0^1 (3x^2 + 3) \cdot g^{2009}(x) dx = \int_0^1 g^{2009}(x) \cdot g'(x) dx = \frac{g^{2010}(x)}{2010} \Big|_0^1 = \frac{4^{2010}}{2010}$ .

### VARIANTA 5

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^{2009} - 2009(x-1) - 1$ .

5p a) Să se calculeze  $f(0) + f'(0)$ .

5p b) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul  $A(1; 0)$ .

5p c) Să se arate că funcția  $f$  este convexă pe  $[0; +\infty)$ .

2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + e^{-x}$ .

5p a) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției  $f$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x=0$  și  $x=1$ .

5p b) Folosind faptul că  $x^2 + e^{-x^2} \geq 1$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , să se demonstreze că

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \geq \frac{2}{3}.$$

5p c) Să se determine volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei  $Ox$ , a graficului funcției  $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = f(x) + f(-x)$ .

### Soluții

1. a)  $f(0) + f'(0) = 2009 - 1 - 2009 = -1$ , unde  $f'(x) = 2009 \cdot x^{2008} - 2009$ .

b) Ecuația tangentei este  $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$ . Rezultă  $y = 0$ , deoarece  $f(1) = f'(1) = 0$ .

c)  $f''(x) = 2009 \cdot 2008 \cdot x^{2007} \geq 0$ ,  $\forall x \in [0; \infty)$ , deci  $f$  este convexă pe  $[0; \infty)$ .

2. a)  $f(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in [0, 1]$ ;  $A_{\Gamma_f} = \int_0^1 (x + e^{-x}) dx = \left( \frac{x^2}{2} - e^{-x} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{e} + 1 = \frac{3e - 2}{2e}$ .

b)  $x^2 + e^{-x^2} \geq 1$ ,  $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow e^{-x^2} \geq 1 - x^2$ ,  $\forall x \in [0, 1]$ .

Rezultă  $\int_0^1 e^{-x^2} dx \geq \frac{3x - x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3}$ .

c)  $g(x) = f(x) + f(-x) = x + e^{-x} - x + e^x = e^x + e^{-x}$ .

$V = \pi \int_0^1 g^2(x) dx = \pi \int_0^1 (e^x + e^{-x})^2 dx = \pi \int_0^1 (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) dx =$

$= \pi \left[ \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^1 + 2x \Big|_0^1 - \frac{e^{-2x}}{2} \Big|_0^1 \right] = \pi \left[ \frac{e^2 - 1}{2} + 2 - \frac{e^{-2} - 1}{2} \right] = \frac{\pi}{2} (e^2 - e^{-2} + 4)$ .